垂直平板を過ぎるOseen流 (Navier-Stokes方程式に関する研究)

宮城, 敏夫

数理解析研究所講究録
52巻 1968年 53-59

垂直平板を過ぎるOseen流

大阪府大　工　宮城敏夫

§1. 解析解

非圧縮定常の二次元Oseen流を考える。平板はy軸上$y=0$と$y=l$との間にあり，一様流はx軸の方向とし，その大きさをU，流体の粘性係数をμ，密度をρとする。

連続の式；　$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0$.

Oseenの方程式；　$(\Delta - 2k\,\partial/\partial x)\,\omega = 0$.

但し，$k = U/2\nu$，$\nu = \mu/\rho$；動粘性係数，$\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$.

境界条件　　板上；　$u = v = 0$.

無限遠；　$u \to U$，$v \to 0$.

この方程式の基本解として

$$u - iv = e^{kx}\left\{ C K_0(kr) + \bar{C} K_1(kr) e^{-i\theta} \right\} - \frac{\bar{C}}{kr} e^{-i\theta}$$

を考える。但し，C，$\bar{C}$は任意常数である．この基本の特異点を平板上に適当に分布させて，平板の流体運動に対す

る影響が示せる様にする。一般にx軸と角αをなす平板については，以上を考慮して，境界条件を導入すると次の積分方程式が得られる。（TAMADA & MIYAGI ; J. Phys. Soc. Japan Vol 17. (1962) 373).

$$\int_0^l \left[e^{k(t-\tau)\cos\alpha} \{ c(\tau) K_0(k|t-\tau|) + e^{-i\alpha} \bar{c}(\tau) \operatorname{sgn}(t-\tau) K_1(k|t-\tau|) \} - e^{-i\alpha} \frac{\bar{c}(\tau)}{k(t-\tau)} \right] d\tau = -U.$$

$\alpha = 0$なる平行に置かれた平板については，Bairstow, Cave and Lang (Phil. Trans. Roy. Soc. A Vol 223 (1923) 383)，Piercy and Winny (Proc. Roy. Soc. A Vol 140 (1933) 543) および Seebass, Tamada and Miyagi (Phys. Fluids Vol 9. (1966) 1697) の研究がある。

今の問題は$\alpha = \frac{\pi}{2}$であるから，$c(\tau) = k\{a(\tau) + ib(\tau)\}$と置けば，基礎の積分方程式は次式となる。

$$k\int_0^l \left[\{a(\tau)+ib(\tau)\} K_0(k|t-\tau|) - \{b(\tau)+ia(\tau)\}\left\{ \operatorname{sgn}(t-\tau) K_1(k|t-\tau|) - \frac{1}{k(t-\tau)} \right\} \right] d\tau = -U.$$

一方，今の問題では明らかに揚力は無く，抵抗Xのみであり，抵抗係数C_Dは次式で与えられる。

$$C_D = \frac{X}{\frac{1}{2}\rho U^2 l} = -\frac{4\pi}{Ul}\int_0^l a(\tau)\, d\tau.$$

Tamada and Miyagi はこの問題を研究し次の結果を得た。但し $R=2kl$ を Reynolds 数とする。

(1) R 小の時，

$$a(\tau) \sim 1/\sqrt{\tau(l-\tau)}\ ,$$

$$C_D = -\frac{8\pi}{R}\cdot\frac{1}{\gamma+\ln(R/16)}\ ,\quad \gamma\ ;\ \text{Euler の常数}$$

(2) R 大の時

$$\left.\begin{matrix} a(\tau) \\ b(\tau) \end{matrix}\right\} = \kappa\pi\frac{2^{\frac{3}{4}}}{\Gamma(\frac{1}{4})}(kl)^{\frac{1}{4}}\left[(\pi k\tau)^{-\frac{1}{2}}e^{-\sqrt{2k\tau/\pi}} \pm \{\pi k(l-\tau)\}^{-\frac{1}{2}}e^{-\sqrt{2k(l-\tau)/\pi}}\right]$$

$$+\kappa\left[\left(\frac{l-\tau}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}} \pm \left(\frac{\tau}{l-\tau}\right)^{\frac{1}{4}}\right],$$

但し，$\kappa = -U/(2\sqrt{2}\ \pi)$.

$$C_D = \pi + 8\Gamma\left(\tfrac{3}{4}\right)R^{-\frac{3}{4}}.$$

ここで，$a(\tau)$ および $b(\tau)$ の第一項は板の端で dominant な解で，第二項は板の中央附近で dominant な解である。勿論 R が無限大の時には，所謂，Oseen の漸近理論と一致している。

§2. 数値解

R 大の時の上述の解析解は，性格の異なる解の第一近似の和として表はされているので，勿論厳密な解ではない。従つて中程度の大きさの R では，かなり近似が悪くなつている

惧れがある。

基礎の積分方程式を実部と虚部に分け，和と差を取れば

$$k\int_0^l \left\{ \begin{matrix} A(\tau) \\ B(\tau) \end{matrix} \right\} \mathcal{K}(k(t-\tau))\, d\tau = -\mathrm{U}.$$

但し，
$$\mathcal{K}(u) = K_0(|u|) \mp \mathrm{sgn}\, u\, K_1(|u|) \pm \frac{1}{u},$$
$$\left. \begin{matrix} A(\tau) \\ B(\tau) \end{matrix} \right\} = a(\tau) \pm b(\tau),$$

となる。併し乍ら，板の中央に関して $a(\tau)$ は対称，$b(\tau)$ は反対称なる性質が既知であるので，求めるものは例えば $A(\tau)$ のみでよい。$x=\tau/l$，$x_0=t/l$ なる量を導入して

$$\frac{R}{2}\int_0^1 A(x)\,\mathcal{K}\left(\frac{R}{2}(x_0-x)\right) dx = -\mathrm{U}$$

を得る。積分区間を n 等分して，n を充分大きく取れば，その短い区間で $A(x)$ は殆んど一定と見做せるので

$$\frac{R}{2}\sum_{p=1}^{n}\int_{\frac{p-1}{n}}^{\frac{p}{n}} A_p(x)\,\mathcal{K}\left(\frac{R}{2}(x_0-x)\right) dx = -\mathrm{U}$$

は
$$\frac{R}{2}\sum_{p=1}^{n} A_p\int_{\frac{p-1}{n}}^{\frac{p}{n}} \mathcal{K}\left(\frac{R}{2}(x_0-x)\right) dx = -\mathrm{U}$$

となる。x_0 を各区間の中央の点に取れば，n 個の方程式を得るので，n 個の未知数 A_p を決定することが出来る。

$R=24$ に対して種々の n について行った計算の結果は表に

R=24

n	C_D
6	3.567
10	3.599
15	3.623
20	3.636

示した如くである。 この時の $A(x)$ の概形を調べると，当然予期される様に，$x=0$，$x=1$ に於ては無限大の形になっている。 事実，粘性流体中の物体の端に於ける特異性の形は，この問題の R が小の場合にも示されている如く，$-\frac{1}{2}$乗の形を持っている。 従って今

一端補正；
$$A_1(x) = A_1/\sqrt{x}$$
$$A_p(x) = A_p \ : \ \text{const.} \qquad p=2,3,\cdots,n.$$

両端補正；
$$A_1(x) = A_1/\sqrt{x}$$
$$A_p(x) = A_p \ : \ \text{const.} \qquad p=2,3,\cdots,n-1.$$
$$A_n(x) = A_n/\sqrt{1-x}$$

なる補正を行うことが考えられる。 これはすべての A_p について $1/\sqrt{x(1-x)}$ をつけ加えておけばよいと思えるが，実際には各連立方程式の要素を計算機で行ったので，非常に煩雑になる上に，$n=20$ の時には 400 個もの要素を計算しなければならないので，各要素の計算も電子計算機に委託するのでなければ，とても手に負えない。 一方確かに両端に於ては無限大であり，その中央の点を適当な常数例えば A_1 として与うより，$A_1/\sqrt{x}$ とする方が遥かによいのは確実であるが，$A_2(x)$ の所ではその区間の両端の実際の値が如何に異っ

ていても、共に有限値であるからその平均 A_2 を常数として計算しても、生じ得る誤差は計算の煩雑さに比べてかなり少ないと考えられる。

$R=24$ の時の C_D

n	一端補正	両端補正
6	3,641	3,844
10	3,649	3,739
15	3,657	3,696
20	3,662	3,697

補正を行った結果得た C_D の値を左に示してある。

以上では分割は等分に行ったが、$a(\tau)+b(\tau)$ なる分布函数の概略から見て、急激な変化をする所も、緩やかな変化をする所も、同じ区間に分割するのは如何にも不公平である。分布函数を積分したものが抵抗に比例するので、一つの reasonable な分割法として、各区間で抵抗が大体同じになる様な分割方法を採用し、この分割の下で得た結果を、先の補正の方法と組み合はせて、下に示す。

$R=24$

n	補正なし	一端補正	両端補正
15	3,666	3,678	3,689
20	3,675	3,681	3,687

この様にして、こゝでは $n=20$、両端補正、分割法は等分でないものを採用して、種々の R について計算を行った。

その結果と §1 の解析解による値とを比較すれば次の如くになる。

R	C_D(数値解)	C_D(解析解)
4	5,658	6.608
8	4,537	5,202
12	4,127	4,662
24	3,687	4,046
96	3,315	3,461

左の結果によれば中程度の大きさの R については，解析解はその近似がかなり粗いことが分る。分布函数の形は R が 10, 15, 20 にもなれば，殆んどお互に区別することが出来ない程近接して了って比較することは少し難しい。尚 $R=4$ の時の C_D の値は，以上とは異なる方法，即ち，Reynolds 展開によって Tomotika and Aoi (Quart. J. Mech. & Appl. Math. Vol.6 (1953) 290) により求められた。その値は 5,670 であり，上表と比較して面白い。

以上の数値解の方法は，この様な形の特異積分方程式の解法としてかなり偉力のあるものと信ずる。これは物体の形や Reynolds 数の大小に関係なく実行出来る点や，同種類の方程式の解を中程度の大きさの parameter の時に求められる点から考えて，応用範囲もかなり広いと思われる。